Werkblad 53

PLANCKKROMMEN

Figuur 1 Max Planck (1858-1947)

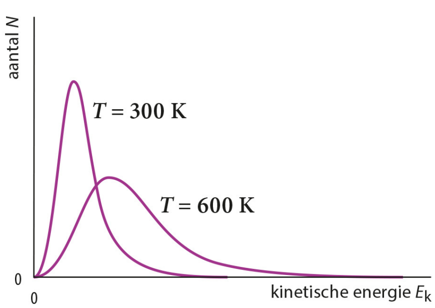
In deze opdracht ontdek je met een computermodel hoe de formule 'achter' de planckkrommen eruit ziet.

De theoretische planckkrommen zijn exact te berekenen met een in 1900 door Max Planck afgeleide formule. Deze formule geeft het door een oppervlak van 1 m^2 in alle richtingen uitgezonden stralingsvermogen in een golflengtegebied van 1 nm als functie van de golflengte van de straling, afhankelijk van de absolute temperatuur van het stralende oppervlak.

De door Planck gegeven afleiding is te lastig om hier te volgen. We beperken ons daarom tot enkele belangrijke ideeën achter en het resultaat van die afleiding.

Stralingspakketjes

Planck baseerde zich in eerste instantie op het idee van bewegende moleculen in een gas, al eerder als eerste wiskundig uitgewerkt door James Clark Maxwell in 1866 en later aangescherpt door Ludwig Boltzmann in zijn kinetische gastheorie. Het uitgangspunt van deze theorie is dat de kinetische energie van de moleculen in een gas statistisch verdeeld is over de gasmoleculen, met een kleine kans op een kleine of grote kinetische energie en een grotere kans op een kinetische energie daar tussenin. Als het aantal gasmoleculen met een bepaalde waarde van de kinetische energie wordt uitgezet tegen die kinetische energie, dan ontstaat een diagram zoals dat van figuur 2. Uit dat diagram blijkt dat er relatief weinig gasmoleculen zijn met een kleine of een grote waarde van de kinetische energie, en dat er relatief veel gasmoleculen zijn met een kinetische energie rond de gemiddelde waarde. Voor die gemiddelde waarde van de kinetische energie van de gasmoleculen geldt: $E_{\mathrm{k,gem}} = \frac{3}{2} \cdot k_{\mathrm{B}} \cdot T$. Hierin is k_{B} de *constante van Boltzmann* en T de absolute temperatuur. Bij een toename van de temperatuur T zal dus de gemiddelde kinetische energie $E_{\mathrm{k,gem}}$ van de gasmoleculen toenemen.



Figuur 2 Het aantal gasmoleculen N als functie van de kinetische energie E_{k} van die gasmoleculen bij verschillende waarden van de temperatuur T.

Het idee van Planck was: als straling nu eens, net als een gas, uit ‘deeltjes’ zou bestaan, dan zou de energie van die ‘deeltjes’ op eenzelfde manier over die ‘deeltjes’ verdeeld kunnen zijn als de verdeling van de kinetische energie over de moleculen van een gas. Bij straling zouden die ‘deeltjes’ dan afzonderlijke ‘stralingspakketjes’ zijn. En net zoals je moleculen met een bepaalde energie kunt ‘tellen’, zou dat ook met die stralingspakketjes moeten kunnen. Planck nam aan dat de energie *E* van die stralingspakketjes evenredig moest zijn met de frequentie: $E = h \cdot f$. Hierin is f de frequentie van de straling en h een constante die Planck nog moest bepalen. Zo’n stralingspakketje werd door Planck een *quantum* genoemd. Tegenwoordig spreken we over een *foton*.

Planckverdeling

Planck ging vervolgens op zoek naar een passende functie waarin de energieverdeling van de stralingspakketjes als functie van de frequentie f met de waarnemingen overeen kwam. In de praktijk wordt langs de horizontale as van een stralingskromme niet de frequentie f maar de golflengte λ uitgezet. In afwijking van wat Planck zelf deed, zullen we nu direct verder werken met die golflengte in plaats van de frequentie. Gezien de vorm van de waargenomen stralingskrommen kwam Planck tot de conclusie dat het stralingsvermogen als functie van de golflengte er als volgt uit zou moeten zien:

$$P_\lambda = \frac{A}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{B}{\lambda}} - 1}$$

In deze formule is P_λ het uitgezonden stralingsvermogen per m^2 in een klein golflengtegebied rond een golflengte λ. In de formule zijn A en B nog te bepalen constanten.

1 Met een computermodel in Coach is relatief snel na te gaan of deze formule een stralingskromme levert die er ongeveer uitziet zoals waargenomen. Maak een computermodel met de rekenregels en startwaarden uit figuur 3. Stel het aantal rekenstappen of *iteraties* in op 5000 (dit doe je bij *instelling*).

rekenregels	**startwaarden**
$L = L + \mathrm{d}L$	L = 50 [nm]
$P = \frac{A}{L^5} * \frac{1}{\mathrm{e}^{B/L} - 1}$	dL = 1 [nm]
	e = 2,7182818
	A = …
	B = …

Figuur 3 Computermodel van de stralingskromme in Coach. Voor de golflengte λ is de letter L (de beginletter van Labda) gebruikt. De startwaarde van de golflengte λ is op 50 nm gezet, om eventuele problemen met delen door 0 te vermijden.

1. Laat Coach het diagram tekenen, met P langs de verticale en λ langs de horizontale as. Begin met A = 2000 en B = 2000 en experimenteer vervolgens met enkele verschillende grotere en kleinere waarden van A en B. Ga na of de stralingskrommen bij benadering de juiste vorm hebben. Let daarbij nog niet op de schaal van de assen in het diagram.

   Probeer met het computermodel na te gaan in welke van de twee constanten A of B de absolute temperatuur T verwerkt moet zitten.

Planckformule

Met zeer veel geduld heeft Plank, in die tijd nog zonder computer, de twee constanten in zijn formule bepaald, zodanig dat de berekende stralingskromme zo goed mogelijk overeenkwam met de waargenomen stralingskromme:

$$A = 2\pi \cdot h \cdot c^2$$

$$B = \frac{h \cdot c}{k_{\mathrm{B}} \cdot T}$$

In deze formules is h de constante van Planck, c de lichtsnelheid, k_{B} de constante van Boltzmann, en T de absolute temperatuur.

De waarden van de lichtsnelheid en de constante van Boltzmann waren in die tijd al bekend. Planck kon nu uit een vergelijking van de theoretische en de waargenomen stralingskromme de waarde van de constante h bepalen.

Het invullen van de constanten A en B levert de planckformule voor de stralingskrommen:

$$P_{\lambda,\mathrm{T}} = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_\mathrm{B} \cdot T}} - 1} \cdot \Delta\lambda$$

In deze formule is $P_{\lambda,\mathrm{T}}$ het uitgezonden stralingsvermogen per m^2 in een golflengtegebied $\Delta\lambda$ (meestal 1 nm of $1{\cdot}10^{-9}$ m) rond een golflengte λ (in m) bij een temperatuur T (in K). De waarden van de constanten h, c en k_B zijn te vinden in Binas.

2 Met een computermodel in Coach is na te gaan of deze formule juist is. Daarvoor moeten we het computermodel van figuur 3 aanpassen.

1. Ga na dat voor de constanten A en B in de formule van Planck geldt:

$$A = 3{,}75 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{W/m^2}$$

$$B = \frac{1{,}44 \cdot 10^{-2}}{T}\ \mathrm{m}$$

Ga na dat het computermodel van figuur 4 in overeenstemming is met de planckformule voor de stralingskrommen. Verander het computermodel van figuur 3 in dat van figuur 4. Laat onder *instelling* het aantal rekenstappen of *iteraties* op 5000 staan.

rekenregels	**startwaarden**
$L = L + \mathrm{d}L$	L = 50 [nm]
$A = 3{,}75 \cdot 10^{-16}$	dL = 1 [nm]
$B = 1{,}44 \cdot 10^{-2}/\mathrm{T}$	e = 2,7182818

$$P = \frac{A}{(L \cdot 10^{-9})^5} * \frac{1}{e^{B/(L \cdot 10^{-9})} - 1} * 10^{-9}$$

T = ... [K]

Figuur 4 Computermodel van de stralingskromme in Coach. Voor de golflengte λ is weer de letter L (de beginletter van Labda) gebruikt. De startwaarden voor λ en $\mathrm{d}\lambda$ zijn zo gekozen dat de horizontale as van het diagram de eenheid nm heeft, dezelfde eenheid als bij de stralingskrommen in Binas. In de rekenregels moet echter met de golflengte in m worden gerekend, met 10^{-9} als omrekeningsfactor. Die omrekeningsfactor staat dan ook tweemaal in de tweede rekenregel achter het golflengtesymbool L. Voor het golflengtegebied $\Delta\lambda$ is 1 nm gekozen: vandaar de laatste factor 10^{-9} in de tweede rekenregel. De eenheid van het uitgezonden stralingsvermogen P is daardoor $\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot nm^{-1}}$, dezelfde eenheid als bij de stralingskrommen in Binas.

2. In Binas staan stralingskrommen voor verschillende waarden van de temperatuur. Vul één van deze temperatuurwaarden in het computermodel in, en controleer of de stralingskromme overeenkomt met die in Binas. Let nu wel op de schaal van de assen in het diagram.

T (K)	λ_{max} (10^{-9} m)	P (10^{7} W/m^{2})
2000		
3000		
4000		
5000		
6000		

Figuur 5

3. Bepaal met het computermodel via *uitlezen* van het diagram de golflengte λ_{max} van het maximum in de stralingskromme voor een aantal verschillende waarden van de temperatuur T. Noteer de resultaten in de tabel van figuur 5. Laat zien dat deze resultaten in overeenstemming zijn met de *wet van Wien*, inclusief de in deze wet voorkomende evenredigheidsconstante k_W.

4. Bepaal met het computermodel via *analyse/verwerking* en *oppervlak* het in totaal over alle golflengten uitgezonden stralingsvermogen P voor een aantal verschillende waarden van de temperatuur T. Noteer de resultaten in de tabel van figuur 5. Laat zien dat deze resultaten in overeenstemming zijn met de *wet van Stefan-Boltzmann*, inclusief de in deze wet voorkomende evenredigheidsconstante σ.